Минимизация затрат при крупных закупках на дискретном финансовом рынке

Выполнила: студентка 411 группы А.И.Макарова
Научный руководитель: к.ф-м.н., доцент В.В.Морозов

Кафедра исследования операций

30 мая 2015

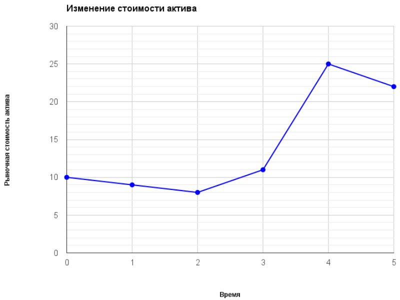
Постановка задачи

$$\sum_{i=0}^{N} x_i = A$$

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$$

$$c(x) = \sum_{i=0}^{N} P_i x_i$$



- Минимизация затрат на совершение сделки
- Минимизация риска при заданном уровне затрат

Минимизация затрат

Формально задачу минимизации затрат на совершение сделки можно записать:

$$\mathbb{E}\left[c(x)\right] \to \min, \qquad x \in S \tag{1}$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (x_0, x_1, \ldots, x_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; x_i \geqslant 0 \ \forall i; \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A \end{array} \right\}$$

Минимизация риска при заданном уровне затрат

Задача минимизации риска представляет собой минимизацию дисперсии величины затрат. Множество стратегий инвестора примет вид:

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{c} (x_0, x_1, \ldots, x_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; x_i \geqslant 0 \ \forall i; \\ \sum\limits_{i=0}^{N} x_i = A; \quad \mathbb{E}\left[c(x)\right] \leqslant C_0 \end{array} \right\}$$

C_0 — заданный уровень затрат.
Тогда формально постановка задачи выглядит следующим образом:

$$Var\left[c(x)\right] \to \min, \qquad x \in S_1 \tag{2}$$

Модели влияния на цену

- Модель Берсима-Ло
- Модель изменения цены с учетом дополнительной информации

Модель Берсима-Ло

Динамика цены:

$$P_i = P_{i-1} + \alpha x_i + u_i, \;\; i = 1, \dots, N$$

u_i — белый шум
$\mathbb{E} u_i = 0, \; Var\, u_i = \sigma^2;$
$\alpha > 0$ — коэффициент влияния покупки на цену

$$P_0 = P_{-1} + \alpha x_0$$

P_{-1} — стоимость актива, сложившаяся на рынке до начала совершения сделок, рассматриваемым инвестором.

Минимизация затрат

Задача может быть записана следующим образом:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} \left(\sum_{j=0}^{i} x_j \right) x_i \to \min, \qquad x \in S$$

$$S = \{(x_0, x_1, \ldots, x_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; x_i \geqslant 0 \ \forall i; \sum_{i=0}^{N} x_i = A\}$$

Из работы Bertsimas D., Lo A. W. Optimal control of execution costs известно, что оптимальной стратегией является:

$$x_0 = x_1 = \ldots x_N = \frac{A}{N+1}$$

Т.е. Затраты минимальны при равномерных закупках.

Минимизация риска при заданном уровне затрат

Введем новые обозначения:
$\sum\limits_{i=j}^{N} x_j = X_j$ — сколько осталось купить в момент времени j
Сформулируем задачу (2) в новых обозначениях и для данной модели:

$$\sigma^2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \to \min, X \in S_1$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} (X_0, X_1, \ldots, X_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; \\ \mathbb{E}\left[\sum\limits_{i=0}^{N} P_i x_i\right] = AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) \leqslant C_0 \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0 \end{array} \right\}$$

Решение задачи

- Целевая функция является квадратичной, как и ограничение;
- Для решения используется обобщенный метод множетелей Лагранжа;
- Функция Лагранжа для поставленной задачи:

$$L(\widetilde{X}, \lambda_0, \lambda_1) = \lambda_0 \sigma^2 \sum_{i=1}^{N} X_i^2 + \lambda_1 \left(AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i (X_i - X_{i+1}) - C_0 \right)$$

$\widetilde{X} = (X_0, X_1, \ldots, X_N)$, λ_0, λ_1 одновременно не равны нулю.

Результат

1-ый случай

$$X_t = A - \frac{A}{N+1}t, \lambda_0 = 0, \ \lambda_1 > 0;$$

Соответствует случаю:

$$C_0 = \min \mathbb{E}\left[c(x)\right].$$

Результат

2-ой случай

$$X_t = A\left(\frac{-\xi_2^{2(N+1)}\xi_2^{-t}+\xi_2^{t}}{1-\xi_2^{2(N+1)}}\right) \quad ,\lambda_0 = 1,\ \ \lambda > 0;$$

$$\omega = \frac{\sigma^2}{\lambda\alpha} + 1, \omega > 1$$

$$\xi_2 = \omega - \sqrt{\omega^2 - 1}, \quad 0 < \xi_2 < 1.$$

Если $\exists x'$ т.ч. $AP_{-1} + \alpha \sum_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0 < 0$

Результат

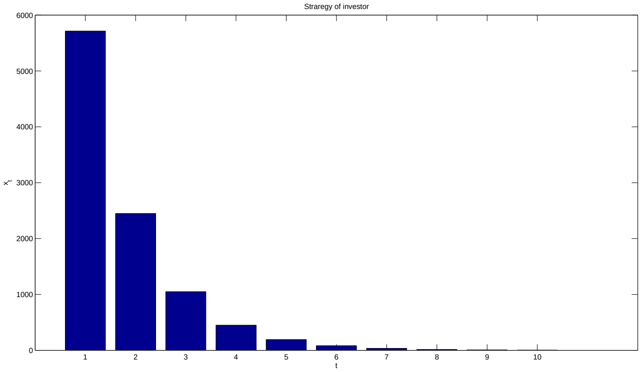
3-ий случай

$$X_0 = A, X_i = 0, i = 1, \ldots, N+1\ , \lambda_0 = 1,\ \ \lambda = 0$$

Когда ограничение на величину затрат не является существенным.

Численный пример

$A = 10000;$
$P_{-1} = 2;$
$\alpha = 0.001;$
$C_0 = 90000;$
$N = 9;$
$\sigma = 1$



Модель изменения цены с учетом дополнительной информации

Динамика цены описывается уравнениями:

$$P_i = P_{i-1} + \alpha x_i + \beta y_i + u_i,\ \ i = 1, \dots, N,\ \ \alpha > 0$$
$$y_i = \rho y_{i-1} + z_i,\ \ \rho \in (-1, 1)$$

y_i — информационная переменная;
β — мера чувствительности влияния данной информации на изменение будущей цены;
u_i, z_i — независимые одинаково распределенные случайные величины.
$\mathbb{E}\left[u_i\right] = 0,\ \ Var\left[u_i\right] = \sigma_u^2;$
$\mathbb{E}\left[z_i\right] = 0,\ \ Var\left[u_i\right] = \sigma_z^2;$

Минимизация затрат

Формула (1) для данной задачи может быть записана следующим образом:

$$\alpha \sum_{t=0}^{N} X_t (X_t - X_{t+1}) + \beta y_0 \sum_{t=0}^{N} X_t \rho^t \to \min, \qquad x \in S$$

$$S = \left\{ \begin{array}{l} (X_0, X_1, \ldots, X_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0 \end{array} \right\}$$

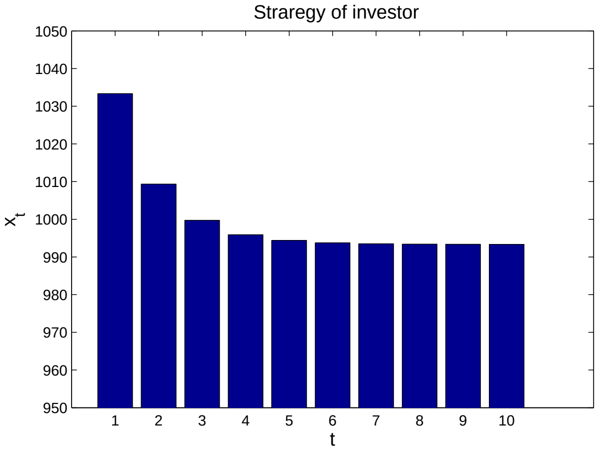
Решение задачи

- Минимизируемая функция и ограничение являются выпуклыми;
- Для решения используется обобщенный метод множетелей Лагранжа;
- Результат:

$$x_t = \frac{A}{N+1} - \frac{\beta y_0 \rho}{\alpha (1-\rho)^2} \left(\frac{1-\rho^{N+1}}{N+1} \right) + \frac{\beta y_0 \rho^{t+1}}{\alpha (1-\rho)}$$

Численный пример

$A = 10000;$
$N = 9;$
$y_0 = 3;$
$\alpha = 0.01;$
$\beta = 5$
$\rho = 0.4;$



Минимизация риска при заданном уровне затрат

Поставим задачу (2) для данной модели:

$$\sigma_u^2 \sum_{t=1}^{N} X_t^2 + \sigma_z^2 \beta^2 \sum_{t=1}^{N} \left(\sum_{j=t}^{N} X_j \rho^{j-t} \right)^2 \to \min, \qquad x \in S_1$$

$$S_1 = \left\{ \begin{array}{l} (X_0, X_1, \ldots, X_N) : 0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T; \\ \mathbb{E}\left[c(X)\right] = AP_{-1} + \alpha \sum_{t=0}^{N} X_t (X_t - X_{t+1}) + \beta y_0 \sum_{t=0}^{N} X_t \rho^t \leqslant C_0; \\ A = X_0 \geqslant X_1 \geqslant \ldots \geqslant X_N \geqslant X_{N+1} = 0 \end{array} \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 2\sigma_u^2 X_i + 2\sigma_z^2 \beta^2 \sum_{t=1}^{i} \left(\sum_{j=t}^{N} X_j \rho^{j-t} \right) \rho^{i-t} + \alpha\lambda \left(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1} \right) + \lambda\beta y_0 \rho^i = 0$$

Полученная система состоит из n уравнений и n неизвестных. Множитель λ находится подстановкой полученного результата в условие дополняющей нежесткости:

$$AP_{-1} + \alpha \sum_{t=0}^{N} X_t (X_t - X_{t+1}) + \beta y_0 \sum_{t=0}^{N} X_t \rho^t - C_0 = 0$$

Результаты работы

- Применен альтернативный метод решения (модифицированный метод множителей Лагранжа);
- Получено решение задачи минимизации риска при заданном уровне затрат в модели Берсима-Ло;
- Сформулирована и решена задача минимизации затрат и минимизации риска при заданном уровне затрат в модели изменения цены с учетом дополнительной информации;

Список литературы

- Markowitz H. Portfolio Selection // Journal of Finance. 1952. V.7. №1. P.77-91.
- Bertsimas D., Lo A. W. Optimal control of execution costs // Journal of Financial Markets. 1988. №1. P.1-50.
- Андреев Н. А. Современные математические модели влияния на цену: приложение к задаче оптимального управления портфелем на рынке, движимом заявками // Сборник статей молодых ученых факультета ВМК МГУ. М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ 2012. Вып. 9. стр.7-25.
- Морозов В. В., Толли Н. И Минимизация риска при крупных закупках на финансовом рынке // International Journal of Open Information Technologies 2014. V.2. №8.
- Феллер В. Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах. Т.1. М.: Мир, 1984.
- Obizhaeva A., Wang J. Optimal trading strategy and supply/demand dynamics. 2005. Available at SSRN:papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract id=686168.
- Лотов А. В., Поспелова И. И. Многокритериальные задачи принятия решений М.: Макспресс, 2008.

Приложение

Необходимые условие минимума функции
Если x^* - решение задачи при наложенных ограничениях, то найдется вектор множетелей Лагранжа (λ_0, λ_1) такой что для функции Лагранжа выполняются условия:

- $L'_{\widetilde{X}} = \alpha\lambda_1(-X_{i-1} + 2X_i - X_{i+1}) = 0, \ \ i = 1, \dots, N.$
- $\lambda_1(AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0) = 0$
- $\lambda_0 \geqslant 0, \lambda_1 \geqslant 0$

Если $\exists x'$ т.ч. $AP_{-1} + \alpha \sum\limits_{i=0}^{N} X_i(X_i - X_{i+1}) - C_0 < 0$ - условия являются достаточными(условие Слейтера)